Bezeichnungen

Wir legen hier einige Bezeichnungen und Konventionen fest, die in diesem Buch immer wieder verwendet werden.

Die Mächtigkeit einer Menge A notieren wir mit Betragsstrichen,

$$|A| = \text{Anzahl der Elemente von } A.$$

Für die Differenz zweier Mengen schreiben wir

$$A - B = \{x \in A \mid x \notin B\}.$$

Mit $\mathbb{R}^n$ bezeichnen wir den Vektorraum aller Spaltenvektoren mit n reellen Einträgen,

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = (x^1, \ldots, x^n)^\top \in \mathbb{R}^n.$$

Die einzelnen Einträge tragen dabei ihre Indizes in der Regel oben. Für eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ bezeichnet $\bar{A}$ den Abschluss und $\mathring{A}$ das Innere.

Das euklidische Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ wird mit spitzen Klammern geschrieben,

$$\langle (x^1, \ldots, x^n)^\top, (y^1, \ldots, y^n)^\top \rangle = \sum_{j=1}^{n} x^j y^j.$$

Für einen Untervektorraum $V \subset \mathbb{R}^n$ ist

$$V^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, y \rangle = 0 \text{ für alle } y \in V\}$$

das orthogonale Komplement.

Das Vektorprodukt auf $\mathbb{R}^3$ ist gegeben durch

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 y^3 - x^3 y^2 \\ -x^1 y^3 + x^3 y^1 \\ x^1 y^2 - x^2 y^1 \end{pmatrix}.$$

Für den Realteil einer komplexen Zahl z schreiben wir $\Re(z)$ und $\ln(x)$ für den natürlichen Logarithmus einer positiven reellen Zahl x.

Eine *glatte* Abbildung bezeichnet eine unendlich oft differenzierbare. Für ihr Differential oder ihre Jacobi-Matrix in einem Punkt p schreiben wir

$$D_p F = \begin{pmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial x^1}(p) & \cdots & \frac{\partial F^1}{\partial x^n}(p) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F^m}{\partial x^1}(p) & \cdots & \frac{\partial F^m}{\partial x^n}(p) \end{pmatrix},$$

wobei $F = (F^1, \dots, F^m)^\top : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Speziell für eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist

$$\operatorname{grad} f = Df^\top = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x^n} \right)^\top$$

der Gradient.

Eine Gleichung der Form $f(x) = g(x) + O(h(x))$ für $x \to 0$ bedeutet, dass $\frac{f(x)-g(x)}{h(x)}$ beschränkt ist für alle $x \neq 0$ aus einer Umgebung von 0.

Ist $X \subset \mathbb{R}^n$ und $f : X \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so ist der *Träger* von f der Abschluss der Menge $\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$ in X und wird mit $\operatorname{supp} f$ bezeichnet.

Die Gruppe der invertierbaren reellen n-mal-n-Matrizen wird mit $\mathrm{GL}(n)$ bezeichnet, die Untergruppe der orthogonalen Matrizen mit $\mathrm{O}(n)$,

$$\begin{aligned} \mathrm{O}(n) &= \{A \in \mathrm{GL}(n) \mid A^\top A = \mathrm{Id}\} \\ &= \{A \in \mathrm{GL}(n) \mid \langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle \text{ für alle } x, y \in \mathbb{R}^n\} \end{aligned}$$

und die Untergruppe der speziell-orthogonalen Matrizen mit $\mathrm{SO}(n)$,

$$\mathrm{SO}(n) = \{A \in \mathrm{O}(n) \mid \det(A) = 1\}.$$

Hierbei steht $A^\top$ für die zu A transponierte Matrix.

Eine geordnete Basis $(b_1, \dots, b_n)$ von $\mathbb{R}^n$ heißt *positiv orientiert*, wenn sie aufgefasst als $n \times n$-Matrix (mit den Basisvektoren als Spaltenvektoren) positive Determinante hat.